

УДК 612.825:612.014.42:612.087

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРКО-КОРКОВЫХ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНОЙ
АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ЭЭГ**

© 2010 г. **А. В. Курганский**

Институт возрастной физиологии РАО, Москва,

e-mail: akurg@yandex.ru

Поступила в редакцию

Принята в печать 3.03.2010 г.

Работа посвящена практическим вопросам применения векторной авторегрессионной модели (ВАР-модели) для исследования многоканальной ЭЭГ, таким как методы предварительной подготовки данных, условия применимости ВАР-модели, выбор ее оптимального порядка и оценка ее валидности. Обсуждаются меры силы корково-корковых функциональных связей: ненаправленные (обычная функция когерентности и мнимая часть комплекснозначной когерентности) и направленные (направленная когерентность, направленная передаточная характеристика и частная направленная когерентность). Анализируются свойства этих мер (масштабная инвариантность) и проблемы, связанные с их применением (ложные взаимодействия, влияние объемного проведения).

Ключевые слова: ЭЭГ, векторная авторегрессионная модель, функция когерентности, объемное проведение.

**Some Methodological Issues in Studying Cortico-Cortical Functional Connectivity with
Vector Autoregressive Model of Multichannel EEG**

A. V. Kurgansky

Institute of Developmental Physiology, Russian Academy of Education, Moscow,

e-mail: akurg@yandex.ru

This review focuses on some practical issues in using vector autoregressive model (VAR) for multichannel EEG analysis. Those issues include: EEG preprocessing, checking if the necessary conditions of VAR model applicability are met, optimal order selection, and assessment of the validity of fitted VAR model. Both non-directed (ordinary coherence and imaginary part of the complex-valued coherency) and directed (directed coherence, directed transfer function and partial directed coherence) measures of the strength of inter-channel coupling are discussed. These measures are analyzed with respect to their properties (scale invariance) and known problems in using them (spurious interactions, volume conduction).

Key words: EEG, vector autoregressive model, coherence function, volume conduction

Исследование взаимодействия на разных структурных уровнях ЦНС – от отдельных нейронов до целых функциональных блоков мозга – является одним из ключевых направлений современной нейронауки [43, 45]. Взаимодействие между исследуемыми структурными единицами отражается в наличии статистической связи между регистрируемыми сигналами – спайками, разными каналами ЭЭГ или магнитоэнцефалограммы, а также BOLD-сигналами (blood oxygen level dependent signal) в отдельных элементарных объемах мозговой ткани. Поэтому развитию методов оценки силы статистической связи между каналами данных уделяется большое внимание, и к настоящему времени предложен целый ряд методов, в основе которых лежит широкий круг идей: от теории информации Шеннона до теории нелинейных динамических систем [13, 15, 17, 21, 29, 31, 42].

Одним из методов, позволяющих оценить не только силу статистической связи между каналами, но и направление влияния одного канала на другой, является векторная (многоканальная) авторегрессионная модель [18, 19], или сокращенно VAR-модель (VAR-model), часто также обозначаемая как MAR или MVAR (multivariate AR). Экспериментальные исследования, выполненные в последние годы, показывают, что основанные на VAR-модели меры направленного влияния являются перспективным инструментом анализа ЭЭГ и МЭГ [12, 15, 16, 23, 24, 33, 35, 36, 37], данных фМРТ (функциональная магнитно-резонансная томография) [2, 40] и статистической связи между активностью (мгновенной частотой импульсации) отдельных нейронов [8, 49]. В то время как принципы VAR-моделирования подробно обсуждаются в литературе [1, 4, 5, 18], практические вопросы VAR-моделирования биологических сигналов за редким исключением [6, 12, 35] обсуждаются только в методических разделах экспериментальных работ и не всегда с достаточной полнотой.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы очертить схему практического применения VAR-модели для анализа многоканальной ЭЭГ и оценки на ее основе корково-корковых функциональных связей [32], ограничившись рассмотрением простейшего, но важного класса линейных VAR-моделей с постоянными

коэффициентами. В начале этой работы кратко изложены принципы ВАР-моделирования и описаны предложенные в литературе меры взаимодействия между каналами. Затем обсуждаются методические вопросы в том порядке, в каком они возникают в ходе обработки данных типичного электрофизиологического эксперимента – начиная с предварительной обработки данных и заканчивая специфическими для ВАР-моделирования особенностями оценки статистической значимости. Обсуждение иллюстрируется примерами, в которых использовалась 16- и 12-канальная ЭЭГ (взрослые испытуемые, состояние спокойного бодрствования с закрытыми глазами; электроды размещались по схеме 10-20), зарегистрированная (Neurotravel 24D, АТЕС МЕДИКА, Россия) в полосе частот 0.5 - 70 Гц и оцифрованная с частотой 250 Гц. Для вычислений использовались некоммерческие программные средства (для Matlab/Octave) с открытым кодом.

ЛИНЕЙНАЯ ВЕКТОРНАЯ АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Во временной области линейные статистические взаимосвязи в многоканальной системе характеризуются взаимными корреляционными функциями между всеми парами каналов и автокорреляционными функциями каждого из каналов. В частотной области такому описанию соответствуют взаимные спектры и автоспектры, на основе которых вычисляется обычная функция когерентности (квадрат модуля когерентности). ВАР-модель – это способ описания корреляционной структуры многоканального временного ряда с помощью набора параметров.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется отрезок оцифрованной M -канальной ЭЭГ длительностью в N отсчетов. В каждый дискретный момент времени n ($1, 2, \dots, N$) этот отрезок характеризуется M значениями электрического потенциала, которые можно представить в виде M -мерного вектор-столбца:

$x(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T$. Здесь $x_m(n)$ – значение электрического потенциала в канале с номером m ($1, 2, \dots, M$), а символ T обозначает операцию транспонирования (преобразования строк в столбцы). ВАР-модель порядка P многоканального сигнала –

VAR(P) – утверждает, что для произвольного дискретного момента времени n текущее значение сигнала $x(n)$ складывается из линейной комбинации предыдущих его значений $x(n-p)$, вплоть до значения, которое наблюдалось P отсчетов тому назад, и текущего вектора белого гауссового шума $e(n) = [e_1(n), e_2(n), \dots, e_M(n)]^T$ с ковариационной матрицей Σ

$$x(n) = \sum_{p=1}^{p=P} a(p)x(n-p) + e(n), \quad (1)$$

где $a(p)$ обозначает квадратную матрицу размерности M , элементы которой $a_{km}(p)$ показывают, какой вклад в текущее значение сигнала $x_k(n)$ в канале k вносит сигнал $x_m(n-p)$ в канале m . Влияние канала m на канал k определяется последовательностью коэффициентов $a_{km}(p)$ при всех возможных значениях величины задержки p от 1 до P включительно, причем это влияние отсутствует, если коэффициенты $a_{km}(p)$ одновременно равны нулю для всех p от 1 до P . На основе коэффициентов $a_{km}(p)$ вычисляют меру прямого влияния (direct coupling или direct causal influence) одного канала на другой [19], обозначаемую $DC_{k \leftarrow m}$, где стрелка указывает направление влияния (подчеркнем, что в общем случае $DC_{k \leftarrow m} \neq DC_{m \leftarrow k}$)

$$DC_{k \leftarrow m} = \sum_{p=1}^{p=P} a_{km}^2(p). \quad (2)$$

В частотной области выражение (1) принимает вид

$$A(f)X(f) = E(f), \quad (3)$$

где f – это частота, $X(f) = [X_1(f), X_2(f), \dots, X_M(f)]^T$ обозначает вектор-столбец Фурье-образов исходных сигналов, $E(f) = [E_1(f), E_2(f), \dots, E_M(f)]^T$ соответствует вектор-столбцу Фурье-образов последовательностей белого шума, а элементы комплексной матрицы $A(f)$ связаны с Фурье-образами последовательностей матричных элементов исходных матриц $a(1), a(2), \dots, a(P)$ [4]. Элемент $A_{km}(f)$ матрицы $A(f)$ показывает, какой частотной фильтрации подвергнется сигнал $X_m(f)$ в канале m , прежде чем стать частью сигнала

$X_k(f)$ в канале k . Поэтому функцию $|A_{km}(f)|$ можно использовать в качестве меры частотно-специфического частного (прямого) направленного влияния одного канала на другой, однако на практике используется относительная мера такого влияния, получившая название "функции частной направленной когерентности" (partial directed coherence, PDC) [4]

$$\pi_{k \leftarrow m}(f) = |A_{km}(f)| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} |A_{jm}(f)|^2}. \quad (4)$$

Для каждой частоты f величина $\pi_{k \leftarrow m}(f)$, заключенная в пределах от 0 до 1, характеризует влияние канала m на канал k , отнесенное к совокупному влиянию этого канала на все каналы, включая каналы m и k .

Матрица $H(f) = A(f)^{-1}$, обратная матрице $A(f)$, называется передаточной функцией (системной функцией) многоканальной системы, и с ее помощью соотношение (3) можно представить в эквивалентной форме

$$X(f) = H(f)E(f). \quad (5)$$

Элементы передаточной функции $H_{km}(f)$ представляют собой частотные фильтры, преобразующие белый шум канала m в составную часть сигнала в канале k , и лежат в основе направленной передаточной функции (directed transfer function, DTF) [19]

$$\theta_{k \leftarrow m}(f) = |H_{km}(f)|. \quad (6)$$

Поскольку спектральная плотность белого шума не зависит от частоты, функция $\theta_{k \leftarrow m}(f)$ фактически характеризует форму спектра той части сигнала в канале k , которую вносит в него канал m как непосредственно, так и опосредованно (через другие каналы). Обычно используют нормированный вариант функции (6)

$$\gamma_{k \leftarrow m}(f) = |H_{km}(f)| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} |H_{kj}(f)|^2}, \quad (7)$$

показывающий, насколько велико влияние канала m на канал k по сравнению с совокупным влиянием на канал k всех каналов, включая канал m .

Знание передаточной функции $H(f)$ позволяет вычислить матрицу спектральной

плотности мощности $S(f)$, на главной диагонали которой расположены автоспектры сигналов, а вне ее находятся их взаимные спектры. На основе $S(f)$ вычисляют комплекснозначную функцию когерентности

$$C_{km}(f) = S_{km}(f) / \sqrt{S_{kk}(f)S_{mm}(f)}, \quad (8)$$

квадрат модуля которой $K_{km}^2(f) = |C_{km}(f)|^2$ представляет собой обычную функцию когерентности. Используя $H(f)$ и $S(f)$, вводят [4, 5] еще одну меру направленного влияния одного канала на другой

$$\delta_{k \leftarrow m}(f) = \sigma_{mm} H_{km}(f) / \sqrt{S_{kk}(f)}. \quad (9)$$

Квадрат модуля этой величины $|\delta_{k \leftarrow m}(f)|^2$, называемый направленной когерентностью [4, 5], показывает, какая именно доля мощности сигнала в канале k связана с суммарным вкладом сигнала, порожденного в канале m . Между $C_{km}(f)$ и $\delta_{k \leftarrow m}(f)$ существует соотношение $C_{km}(f) = \sum_{j=1}^{j=M} \delta_{k \leftarrow j}^H(f) \delta_{m \leftarrow j}(f)$, которое показывает, что $C_{km}(f)$ отражает те общие для двух каналов k и m сигналы, которые привносятся в них каждым из M каналов (верхний индекс H обозначает операцию эрмитова сопряжения).

Помимо обычной функции когерентности используются также функции множественной когерентности [18], частной когерентности [2, 18, 34] и построенная на основе последней прямая направленная передаточная функция (direct directed transfer function, dDTF) [20], являющаяся произведением функции частной когерентности и направленной передаточной функции $\theta_{k \leftarrow m}(f)$. Кроме того, с ВАР-моделированием тесно связана мера взаимодействия между каналами, получившая название причинности Винера - Грэйнджера (Wiener - Granger causality, Granger causality). В простейшем двухканальном варианте в основе этой меры лежит следующая идея: сигнал $y(n)$ можно рассматривать как "причину" сигнала $x(n)$, если сигнал $x(n)$ может быть предсказан лучше (с меньшей дисперсией остатков авторегрессии) при учете влияния сигнала $y(n)$ и его предыстории, чем с учетом предыстории одного только сигнала $x(n)$ [8, 14, 15].

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ВАР-МОДЕЛИ

Нормальность. Многоканальный сигнал $x(n)$, удовлетворяющей ВАР-модели (1), должен быть распределен по нормальному закону, поскольку сигнал $x(n)$ линейно связан с белым гауссовским шумом $e(n)$ [1]. Для проверки этого необходимого условия применимости ВАР-модели надо убедиться в том, что совместное распределение сигналов в M каналах не отличается от многомерного нормального распределения. На практике обычно ограничиваются более слабым требованием нормальности сигнала отдельно в каждом канале. Именно так поступили, например, авторы работы [38], воспользовавшись тестом Колмогорова - Смирнова.

Отклонение распределения мгновенных значений ЭЭГ от нормального не означает, что для таких данных невозможно построить ВАР-модель; оно означает лишь, что ВАР-модель не будет объяснять всей временной структуры сигнала, а даст лишь приближенное описание сигнала, ограниченное статистикой второго порядка. В какой мере такое приближение оправдано, зависит от смысла задачи.

Стационарность. Условием адекватности ВАР-модели является слабая стационарность [1] ЭЭГ сигнала. Для гауссовского векторного случайного процесса это условие эквивалентно тому, что вектор средних (по каналам) значений, а также векторная автокорреляционная последовательность не зависят от абсолютного момента времени n , иными словами, ВАР-модель (1) в равной степени применима к любым последовательным $P+1$ отсчетам многоканального сигнала.

Если требуется одна общая ВАР-модель для нескольких отрезков ЭЭГ, записанных в последовательные моменты времени, то важно убедиться в том, что, во-первых, не происходит систематических изменений статистических характеристик сигнала от отрезка к отрезку и, во-вторых, что статистические свойства ЭЭГ не изменяются сходным образом в пределах каждого отрезка. Нестационарность первого типа может быть связана с медленным изменением функционального состояния, а нестационарность второго – с каскадом быстрых процессов, возникающих, например, в отрезках ЭЭГ, синхронизированных с началом сенсорного стимула.

Исчерпывающая проверка на стационарность предполагает сравнение совместных распределений многоканальной ЭЭГ для разных отрезков и разных частей одного отрезка, однако на практике обычно ограничиваются проверкой постоянства распределения мгновенных амплитуд сигнала в отдельных каналах [6, 35, 50]. Например, в работе [35] использовалась процедура, в которой каждый отрезок делился пополам и для каждого канала распределение в первой половине сравнивалось с распределением во второй половине с помощью теста Колмогорова - Смирнова для несвязанных выборок. Те отрезки, где обнаруживалось статистически значимое различие между двумя распределениями, исключались из дальнейшего анализа как нестационарные.

Поскольку статистические свойства нормально распределенного многоканального сигнала полностью описываются статистикой второго порядка (вектором средних и векторной автокорреляционной последовательностью), а VAR-модель однозначно связана с корреляционной последовательностью многоканальными уравнениями Юла - Уолкера [1], то требование стационарности эквивалентно требованию неизменности (с точностью до флуктуаций) параметров VAR-модели (коэффициентов $a(p)$ и матрицы Σ) и, следовательно, неизменности всех зависящих от них величин. Таким образом, проверка на предмет неизменности спектров мощности [50], функций когерентности и любых других зависящих от параметров VAR-модели функций также является проверкой на стационарность.

Нестационарность ЭЭГ вовсе не исключает применение VAR-моделирования. Слабо выраженной нестационарностью можно пренебречь, а в случае выраженной нестационарности можно применить либо VAR-модель с зависящими от времени коэффициентами VAR [23, 24], либо VAR-модель с постоянными коэффициентами, но построенную для достаточно коротких сегментов ЭЭГ, в пределах которых сигнал можно считать приблизительно стационарным [12].

Постановка электродов, выбор монтажа и референтного электрода. Не следует использовать общий (усредненный) референт, поскольку это ведет к

перемешиванию сигналов в разных каналах (особенно при небольшом числе электродов) и, следовательно, к возникновению искусственных (ложных) статистических зависимостей между сигналами [19]. Отметим, что применение того или иного цифрового монтажа – это частный случай линейного преобразования многомерных данных. Очевидно, что и другие преобразования данных, например применение метода принципиальных компонент, также приведут к возникновению искусственных статистических зависимостей между каналами.

Можно предположить, что исследованию функционального взаимодействия (т. е. поиску линейных статистических связей между сигналами [32]) в наибольшей степени соответствует равномерная по поверхности скальпа постановка электродов. Учитывая низкое пространственное разрешение ЭЭГ, именно в этом случае можно быть в наибольшей степени уверенным, что в полученной многоканальной ЭЭГ отражены основные корковые источники биоэлектрической активности. Если же использовать локальную группу электродов, то возникает проблема ненаблюдаемых (латентных) источников сигнала [14], существенно осложняющая интерпретацию направленного влияния.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ VAR-МОДЕЛИ

Выбор алгоритма для определения коэффициентов VAR-модели. Для нахождения коэффициентов VAR-модели произвольного порядка P разработан целый ряд алгоритмов [1, 13, 26]. Большинство из них реализованы в виде функций Matlab/Octave и доступны на некоммерческой основе (<http://biosig.sourceforge.net/>).

Выбор оптимального порядка VAR-модели. Если задан порядок VAR-модели, то вычисление коэффициентов VAR-модели не составляет труда. Однако, с выбором порядка модели связан ряд проблем. В экспериментальных работах для определения оптимального порядка VAR-модели обычно используют один из нескольких критериев, подробно обсуждаемых в работах [1, 7, 28]. Эти критерии оценивают минимально необходимое число параметров VAR-модели, рекомендуя, тем самым, наиболее экономную модель (parsimonious model) в смысле принципа лезвия Оккама. На

практике (например, [6]) чаще всего используют информационный критерий Акаике, для которого принято обозначение AIC (от Akaike Information Criterion). Процедура применения AIC заключается в том, что для отрезка многоканальной ЭЭГ строят целую серию ВАР-моделей последовательно увеличивающегося порядка P , обычно от 1-го до некоторого порядка, заведомо большего, чем оптимальный. Для каждой такой модели определяют ковариационную матрицу остатков авторегрессии Σ , зависящую от P , и затем вычисляют следующую величину (здесь использованы те же обозначения, что и в обзоре ВАР-модели)

$$AIC(P) = N \ln(\det(\Sigma)) + 2PM^2. \quad (10)$$

Оптимальным считается такой порядок P , который соответствует минимуму функции (10). При фиксированной длине N отрезка M -канальной ЭЭГ первое слагаемое в (10), пропорциональное натуральному логарифму определителя матрицы Σ , убывает с возрастанием порядка P — быстро вначале, а затем медленно. Второе слагаемое, пропорциональное числу параметров ВАР-модели (P матриц размером $M \times M$ каждая дают PM^2 свободных параметров), напротив, линейно возрастает с ростом порядка P . Точка минимума достигается при таком значении порядка, при котором скорость уменьшения первого слагаемого сравнивается со скоростью увеличения второго.

На рис. 1, а показан характерный вид зависимости $AIC(P)$ для значений порядка, лежащих в диапазоне от 1 до 30. Первый локальный минимум достигается при $P=3$, однако при $P > 15$ начинается резкое уменьшение величины $AIC(P)$, и ее минимум окажется на верхней границе этого диапазона. Такое поведение функции $AIC(P)$ при чрезмерном увеличении порядка P связано с избыточно подробным описанием (overfitting) отрезка ЭЭГ, при котором ВАР-модель описывает не только типичную временную структуру сигнала, но и ее флуктуации, уникальные для этого отрезка. Поэтому в качестве оптимального порядка часто рекомендуют выбирать либо положение первого локального минимума функции $AIC(P)$, либо ограничивать максимальный порядок, например, величиной $P_{max} < 3\sqrt{N}/M$ [44].

Поскольку число свободных параметров ВАР-модели порядка P , равное PM^2 , квадратично возрастает с ростом числа каналов M , а величина $\ln(\det(\Sigma))$ (при сопоставимых дисперсиях остатков предсказания в разных каналах) – приблизительно пропорционально числу каналов, оптимальный порядок в общем случае будет тем ниже, чем больше каналов в отрезке ЭЭГ фиксированной длины N : на рис.1, б показаны функции $AIC(P)$, вычисленные для 2, 6, 10 и 12 каналов 4-секундного отрезка ЭЭГ. Им соответствуют значения оптимального порядка, равные 19, 16, 9 и 5.

Кроме того, положение минимума функции $AIC(P)$ зависит от длины отрезка ЭЭГ. Типичная картина такой зависимости представлена на рис. 1, в, где показаны наложенные друг на друга зависимости $AIC(P)$, построенные для взятых из одной и той же непрерывной записи ЭЭГ отрезков длительностью 2, 4, 8 и 16 с. Из положений минимумов на этих кривых видно, что оптимальными следует считать соответственно 3, 5, 6-й и 11-й порядки.

Отмеченные выше особенности AIC показывают, что без учета количества каналов и длительностей отрезков ЭЭГ не следует полагаться на те значения оптимального порядка, которые сообщаются в экспериментальных работах, даже если речь там идет о сходных экспериментальных условиях.

Важно отметить, что предварительная частотная фильтрация ЭЭГ существенно влияет на оценку оптимального порядка ее ВАР-модели (в известных автору экспериментальных работах такое влияние не учитывалось). В приложении Б показано, что ВАР-модель обработанной частотным фильтром ЭЭГ имеет более высокий порядок, чем ВАР-модель исходного сигнала. Этот эффект иллюстрирует рис.1, г. Из рисунка видно, что для исходного сигнала, в котором присутствует сетевая наводка частотой 50 Гц умеренной амплитуды (около 3 мкВ), функция $AIC(P)$ достигает минимума при 8-м порядке ВАР-модели. Однако если до построения ВАР-модели удалить из всех каналов сетевую наводку с помощью режекторного (заградительного) фильтра, то характер функции $AIC(P)$ существенно изменится, и оптимальный порядок

окажется равным 28. Попытка избавиться от сетевой наводки, применив ко всем каналам ЭЭГ фильтр Баттерворта 4-го порядка с верхней граничной частотой 35 Гц, приведет к тому, что функция $AIC(P)$ превратится в монотонно убывающую в очень широком диапазоне значений порядка P . Не исключено, что отмеченное в работах [12, 46] монотонное убывание функции $AIC(P)$ в широком диапазоне значений порядка VAR-модели связано именно с фильтрацией сигнала, а не с природой ЭЭГ.

Из сказанного следует, что при оценке оптимального порядка VAR-модели ЭЭГ следует избегать предварительной частотной фильтрации (в том числе и для удаления артефактов). Вместо режекторного фильтра лучше применить процедуру вычитания синусоиды частотой 50 Гц, амплитуда и фаза которой находятся подгонкой к сигналу сетевой наводки [48]. Такая процедура не вносит в исходный сигнал искусственных корреляций и не приводит к увеличению оптимального порядка VAR-модели, который в рассмотренном выше примере равен 7 (рис. 1, z).

В типичном исследовании в каждом экспериментальном условии регистрируют множество отрезков ЭЭГ, поэтому логично использовать одну VAR-модель, характеризующую все отрезки разом. Однако если эти отрезки, как чаще всего и бывает, не составляют непрерывной записи, то их нельзя просто "пристыковать" друг к другу (иначе возникнут разрывы на стыках отрезков) и применить один из блочных алгоритмов нахождения коэффициентов VAR-модели. Поэтому авторы работы [12] модифицировали один из стандартных алгоритмов, приспособив его для работы с многими отрезками (программная реализация этого алгоритма описана в работе [11]). С помощью этого алгоритма можно найти усредненную по всем отрезкам матрицу Σ и использовать ее в формуле (10) для оценки оптимального порядка VAR-модели всего набора отрезков.

Проблема выбора оптимального порядка VAR-модели аналогична проблеме выбора степени сглаживания в классическом спектральном оценивании [1]. Выбор слишком низкого порядка VAR-модели приведет к недостаточно подробному описанию корреляционной структуры сигнала, а также к неспособности такой модели правильно

отразить слабые или разрешить близкие спектральные максимумы. Напротив, слишком высокий порядок может привести к появлению ложных спектральных максимумов. Поэтому рекомендуется выбирать такой порядок модели, который дает приемлемое описание структуры сигнала [1]. Что именно считать приемлемым, зависит от характера решаемой задачи. Проиллюстрируем эти соображения на примере, в котором непрерывная запись 16-канальной фоновой ЭЭГ длительностью 2 мин разбивается на 60 смежных отрезков длиной 2 с каждый. Если применить критерий Акаике к отдельным отрезкам, то в подавляющем большинстве случаев оптимальным окажется третий порядок $P = 3$ (рис. 1, δ). Если построить VAR-модель 3-го порядка отдельно для каждого отрезка ЭЭГ и вычислить оценку спектра мощности ЭЭГ в канале $O1$, усреднив индивидуальные спектральные оценки по 60 отрезкам, то окажется, что пик на частоте альфа-ритма (штриховая линия) очень сильно сглажен, в то время как аналогичная усредненная по отрезкам классическая спектральная оценка с помощью стандартного метода Уэлча (эффективное сглаживание – 2 Гц) [1] покажет наличие узкого пика (пунктирная линия). Если же применить критерий Акаике ко всей записи, то оптимальный порядок будет равен 26. Построив VAR-модель 26-го порядка для каждого отрезка и усреднив индивидуальные спектральные оценки, получим хорошее согласие между усредненной спектральной оценкой на основе VAR-модели и классической оценкой по Уэлчу (сплошная линия).

ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ VAR-МОДЕЛИ

Устойчивость VAR-модели. Определив коэффициенты VAR-модели, необходимо убедиться в том, что образованный ими многомерный фильтр устойчив в математическом смысле слова. В неустойчивой VAR-модели, в силу ее рекурсивной природы, многократное применение процедуры предсказания новых значений сигнала на основе предыдущих его значений приведет к экспоненциальному ("взрывному") возрастанию амплитуды сигнала. Для проверки устойчивости VAR-модели разработана специальная процедура, основанная на применении критерия Ляпунова [11, 12].

Серийные корреляции остатков векторной авторегрессии. Оценка матричных

функций частоты $A(f)$, $H(f)$ и зависящих от них мер взаимодействия будет корректной только в том случае, если остатки авторегрессии $e_m(n)$ ($m = 1, \dots, M$) действительно могут рассматриваться как выборки из белого шума. Шум $e_m(n)$ является белым, если в нем отсутствуют корреляции между соседними отсчетами – серийные корреляции. Простейшей проверкой на отсутствие серийной корреляции является исследование автокорреляционной функции сигнала $e_m(n)$ в каждом канале m . Для этого обычно используется тест, основанный на том, что при 5%-ном уровне значимости в соответствии с нуль-гипотезой значения автокорреляционной функции для ненулевых задержек должны лежать в пределах двух стандартных отклонений, что с хорошей точностью соответствует доверительному интервалу $\pm 2/\sqrt{(N)}$ (см. [6, 12, 38]).

Корреляции остатков векторной авторегрессии в разных каналах. Хотя VAR-модель предполагает, что возбуждающие разные каналы белые шумы статистически независимы и, следовательно, их ковариационная матрица Σ является диагональной, однако для многоканальной ЭЭГ это условие на практике не выполняется. Одной из причин недиагональности матрицы Σ является общий для всех каналов шум наблюдения (например, аппаратный шум или помеха); еще одна причина – влияние объемного проведения (volume conduction) [47].

Репрезентативность VAR-модели. Репрезентативность VAR-модели предполагает, что меры взаимодействия не покажут качественно иную картину, если незначительно изменить порядок VAR-модели, добавить новые каналы или изменить длину отрезка анализируемой ЭЭГ [12]. Устойчивость качественной картины взаимодействий между каналами к малым изменениям порядка VAR-модели можно оценить, построив модели супраоптимальных порядков – (например, взятых из ряда $P-2, P-1, P, P+1, P+2$, где P – оптимальный порядок) [12] и наблюдая за изменением интересующих нас мер взаимодействия.

Представление о характере изменения мер взаимодействия при изменении порядка модели дает рис.2, а. На этом рисунке показаны вычисленные для пары

каналов $P3$ и $P4$, принадлежащих 16-канальной записи ЭЭГ длительностью 12 с, функция когерентности $K_{P3-P4}^2(f)$ (тонкая сплошная линия) и нормированные направленные передаточные функции $\gamma_{P3 \leftarrow P4}^2(f)$ (толстая сплошная линия) и $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$ (толстая штриховая линия). Порядок ВАР-модели увеличивается слева направо, принимая значения 8, 14, 20 и 26 соответственно. Из рисунка видно, что от 8-го до 14-го порядка и от 14-го до 20-го характер функций $K_{P3-P4}^2(f)$, $\gamma_{P3 \leftarrow P4}^2(f)$, $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$ существенно изменяется (в $K_{P3-P4}^2(f)$ появляется максимум на частоте 20 Гц, а в функции $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$ появляется минимум в районе 17 Гц), но при достижении 20-го порядка качественная картина стабилизируется и, за исключением мелких деталей, остается прежней при использовании ВАР-модели 26-го порядка. Аналогичным образом можно оценить и устойчивость картины взаимодействий по отношению к варьированию длительности отрезка ЭЭГ.

Если речь идет об исследовании функциональных связей [32], когда ни участники ансамбля взаимодействующих областей коры, ни характер их взаимодействия заранее неизвестны, имеет смысл потребовать, чтобы характер взаимодействий мало изменялся при добавлении в ВАР-модель новых каналов [12]. Предположим, что в M -канальной модели для пары каналов k и m одна из мер взаимодействия каналов (например, направленная передаточная функция $\gamma_{k \leftarrow m}^2(f)$) показала в некотором частотном диапазоне наличие преимущественного направленного взаимодействия от m к k . Насколько эта картина специфична именно для данного случая M -канальной записи? Не изменится ли она существенно при ином наборе отведений? Рассмотрим пример. На рис.2, б показано, как изменяются при увеличении числа каналов от 4 до 16 (слева направо) функции $K_{P3-P4}^2(f)$, $\gamma_{P3 \leftarrow P4}^2(f)$, $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$, вычисленные для ВАР-модели 20-го порядка для того же отрезка ЭЭГ и той же пары отведений $P3-P4$, что были использованы в примере, показанном на рис.2, а. Сначала эти функции вычисляются для 4-канальной ($P3$, $P4$, $F7$ и $F8$) ВАР-модели; на следующем шаге используется 8-канальная ВАР-модель, в которой к предыдущим каналам добавлены еще 4 канала ($O1$,

$O2$, $T5$ и $T6$); на третьем шаге используется 10-канальная модель, где учитываются еще два канала (Cz и Fz); наконец, строится модель для всех 16 каналов (добавляются оставшиеся каналы: $F3$, $F4$, $T3$, $T4$, $C3$ и $C4$). Очевидно, что 8, 10 и 16-канальные модели дают качественно сходную картину функций $K_{P3-P4}^2(f)$, $\gamma_{P3\leftarrow P4}^2(f)$, $\gamma_{P4\leftarrow P3}^2(f)$, а 4-канальная модель существенно отличается характером функций $\gamma_{P3\leftarrow P4}^2(f)$ и $\gamma_{P4\leftarrow P3}^2(f)$. Таким образом, критическим для сохранения качественного характера этих функций оказалась включение в модель 8 каналов ($P3$, $P4$, $F7$, $F8$, $O1$, $O2$, $T5$ и $T6$). Следовательно, можно ожидать, что картина направленного взаимодействия каналов $P3$ и $P4$ в полной 16-канальной модели вряд ли изменится при добавлении новых каналов, но только при условии, что соответствующие им источники сигнала слабо взаимодействуют с источниками основных 8 каналов. Отметим, что обычная функция когерентности практически не изменяется по мере включения в модель все большего числа каналов (см. также [12]), что и следует ожидать для адекватной VAR-модели, поскольку при оценивании функции когерентности классическими методами последняя вообще никак не зависит от числа зарегистрированных каналов.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МЕР ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОРКОВО-КОРКОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Влияние объемного проведения на меры взаимодействия между каналами.

Термином "объемное проведение" обозначают тот факт, что регистрируемый сигнал ЭЭГ не отражает активность мозговых источников биоэлектричества непосредственно, а измеряет изменяющееся во времени распределение электрического потенциала на поверхности головы, возникающего вследствие протекания в проводящих тканях головы электрического тока, вызванного активностью этих источников [47]. Объемное проведение приводит к тому, что в каждом канале ЭЭГ наблюдается смесь сигналов, порожденных многими источниками, и поэтому рассмотренные выше меры статистической связи сигналов в разных каналах могут отражать не только истинное функциональное корково-корковое взаимодействие, но и простое наличие в 2 каналах сигнала от одного и того же источника. Хотя возможен количественный подход к

оценке влияния объемного проведения на коэффициенты M -канальной ВАР-модели и, следовательно, на меры взаимодействия между каналами (такой подход намечен в Приложении Б), здесь мы ограничимся простой иллюстрацией такого влияния на конкретных примерах.

За счет влияния объемного проведения комплекснозначная функция когерентности $C_{km}(f)$ даже в случае независимых источников (т.е. при отсутствии истинного корково-коркового взаимодействия) отлична от нуля, зависит только от их автоспектров ([27], выражение (11) на стр. 2296) и, следовательно, является действительной функцией. Исключить это ложное взаимодействие можно, используя мнимую часть комплекснозначной функции когерентности

$J_{km}(f) = \text{Im}\{C_{km}(f)\} = |C_{km}(f)| \sin(\Delta\varphi_{km}(f))$ вместо ее модуля (квадрата модуля) [27, 30].

Совместный анализ функций $|C_{km}(f)|$ и $J_{km}(f)$ может оказаться полезен для оценки степени влияния объемного проведения. На рис. 3, а показаны модуль комплекснозначной когерентности $|C_{km}(f)|$ и ее мнимая часть $J_{km}(f)$, вычисленные для нескольких пар отведений на основе коэффициентов ВАР(26)-модели отрезка непрерывной 16-канальной ЭЭГ длительностью 24 с. Из рисунка видно, что в парах близко расположенных электродов $Cz-C4$ и $O2-T6$ функция $J_{km}(f)$ мало отличается от нуля, в то время как модуль когерентности близок к единице. Такая картина может быть следствием как сильного влияния объемного проведения, так и высокой синхронности корковых источников (сильное корково-корковое взаимодействие). Напротив, в паре $F7-O1$ далеко разнесенных электродов значения функций $|C_{km}(f)|$ и $J_{km}(f)$ гораздо ближе друг к другу и практически совпадают в районе острого пика, расположенного на частоте альфа-ритма. Такое совпадение функций $|C_{km}(f)|$ и $J_{km}(f)$ (возможное только тогда, когда общий для $F7$ и $O1$ альфа-ритм отличается по фазе в этих отведениях примерно на 90 град.) означает, что влияние объемного проведения на частоте альфа-ритма мало. Совместный анализ функций $|C_{km}(f)|$ и $J_{km}(f)$ может оказаться полезен и тогда, когда сильное взаимодействие на частоте какого-либо ритма

проявляется слабо при анализе $|C_{km}(f)|$, но становится очевидным при анализе $J_{km}(f)$ (F8-C3, рис. 3, а).

Если воспользоваться отсутствием влияния объемного проведения на взаимодействие каналов $F7$ и $O1$ на частоте 10 Гц в приведенном выше примере и считать сигналы от этих отведений непосредственно сигналами эквивалентных источников, можно смоделировать влияние объемного проведения на меры взаимодействия каналов. Для этого из исходного отрезка 16-канальной ЭЭГ (обозначим его $x(n)$), создадим три отрезка искусственной ЭЭГ ($y^{(k)}(n)$, $k = 1, 2, 3$), в которых все каналы, кроме $F7$ и $O1$, оставим без изменения, а вместо исходных сигналов в $F7$ и $O1$ будем использовать их линейные комбинации ("смеси"), имитирующие разные степени влияния объемного проведения: $y_{O1}^{(k)}(n) = x_{O1}(n) + g^{(k)}x_{F7}(n)$ и $y_{F7}^{(k)}(n) = x_{F7}(n) + g^{(k)}x_{O1}(n)$. Множитель g здесь характеризует влияние объемного проведения и принимает при $k = 1, 2, 3$ значения 0.2, 0.4 и 0.6 соответственно. Для отрезка $x(n)$ ($g = 0$) и для трех отрезков $y^{(k)}(n)$ ($k = 1, 2, 3$) построим ВАР-модель и вычислим модуль функции когерентности $|C_{O1-F7}(f)|$ (сплошная линия) и мнимую часть когерентности $J_{O1-F7}(f)$ (штриховая линия) (рис. 3, б), а также функции частной направленной когерентности $\pi_{F7 \leftarrow O1}(f)$ (сплошная линия) и $\pi_{O1 \leftarrow F7}(f)$ (штриховая линия) (рис. 3, в). Из рис.3, б следует, что по мере увеличения степени взаимного влияния каналов за счет объемного проведения (возрастания g) функция $|C_{O1-F7}(f)|$ возрастает, приближаясь к единице, а функция $J_{O1-F7}(f)$, напротив, уменьшается, приближаясь к нулю. Из рис.3, в видно, что при возрастании g от 0 до 0.6 однонаправленное влияние $O1$ на $F7$ постепенно становится двунаправленным, при этом уменьшается его частотная специфичность (пик функции $\pi_{F7 \leftarrow O1}(f)$ на частоте 10 Гц расширяется и превращается в плато). Подчеркнем, что этот пример только иллюстрирует влияние объемного проведения на характер частной направленной когерентности и не может служить основанием для обобщения, поскольку анализ такого влияния, насколько известно автору, в литературе не

проводился.

Радикальный способ борьбы с влиянием объемного проведения состоит в построении ВАР-модели не для электрического потенциала (ЭЭГ), а для плотности электрического тока источников ЭЭГ [3]. Плотность источников тока в коре можно оценить, применяя двумерный оператор Лапласа к мгновенному распределению потенциала [39, 47]. Для оценки матрицы смешения возможно применение класса методов, известных как "разделения смеси сигналов вслепую" (Blind Source Separation/Extraction, BSS/BSE) [9, 10].

Влияние усиления (масштаба сигнала) в каналах. Коэффициенты ВАР-модели изменяются при неодинаковом изменении масштаба сигнала ЭЭГ в различных каналах и, как показано в Приложении В, инвариантными к такому преобразованию остаются только $C_{km}(f)$ и $\delta_{k \leftarrow m}(f)$, а такие меры, как $DC_{k \leftarrow m}$, $\theta_{k \leftarrow m}(f)$, $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ и $\pi_{k \leftarrow m}(f)$, изменяются. Приведем пример такого изменения. Возьмем отрезок 12-канальной ЭЭГ ($O2, P4, C4, F4, T4, T6, O1, P3, C3, F3, T3, T5$) длительностью 24 с, построим для него ВАР-модель 26-го порядка и вычислим функцию частной направленной когерентности $\pi_{k \leftarrow m}(f)$ (рис. 4, а) и нормированную направленную передаточную функцию $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ (рис. 4, б) для каналов $O2$ и $P4$. Из рис. 4, а видно, что имеет место значительное превышение частного направленного влияния $P4$ на $O2$ (тонкая сплошная линия) в бета-диапазоне частот (20-25 Гц) над противоположным влиянием $O2$ на $P4$ (тонкая пунктирная линия). Построим теперь ВАР-модель 26-го порядка для этого отрезка ЭЭГ, предварительно усилив в нем сигнал в канале $P4$ в 2 раза, ослабив в 2 раза сигнал в канале $O2$ и оставив неизменными сигналы в остальных каналах. В результате такого преобразования функции $\pi_{O2 \leftarrow P4}(f)$ и $\pi_{P4 \leftarrow O2}(f)$ существенно изменились, и теперь в бета-диапазоне частот частные направленные влияния $P4$ на $O2$ (толстая сплошная линия) и $O2$ на $P4$ (толстая пунктирная линия) сравнялись по силе. В случае направленной передаточной функции (рис. 4, б) ситуация окажется еще хуже: в диапазонах частот от 1 до 7 Гц и от 25 до 37 Гц преимущественное направление влияния $P4$ на $O2$ изменилось

на противоположное.

Из сказанного следует, что любые преобразования ЭЭГ, которые изменяют масштаб сигнала в разных каналах неодинаковым образом, как, например, нормировка сигнала на величину его стандартного отклонения отдельно в каждом канале, использованная в работе [12], могут существенно изменить характер функций $\pi_{k \leftarrow m}(f)$ и $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ (рис. 4, в, з, толстые линии), и поэтому к интерпретации этих мер взаимодействия между каналами следует подходить с осторожностью.

Можно, однако, получить инвариантные относительно преобразования масштаба версии функций $\pi_{k \leftarrow m}(f)$ и $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ (см. замечание в пункте 3.1.3. работы [4]), если в формулах (4) и (7) вместо $A_{km}(f)$ и $H_{km}(f)$ использовать величины $(\sigma_{mm} / \sigma_{kk})A_{km}(f)$ и $(\sigma_{mm} / \sigma_{kk})H_{km}(f)$. Такие переопределенные функции, которые мы обозначим $\pi_{k \leftarrow m}^{(\sigma)}(f)$ и $\gamma_{k \leftarrow m}^{(\sigma)}(f)$, показаны тонкими линиями на рис. 4, в, з.

Ложные взаимодействия между каналами. Было замечено [1], что ВАР-модель, особенно при коротких отрезках данных и большом числе каналов, может показывать наличие ложных зависимостей (spurious couplings/causalities) между каналами. Продемонстрируем этот эффект на примере записи 16-канальной ЭЭГ длительностью 120 с, в которой исходный сигнал в одном из каналов (P3) заменим на близкий по спектральным характеристикам сигнал, но взятый из отрезка ЭЭГ другого испытуемого и потому статистически не связанный ни с одним из сигналов исходной записи. Полученную запись разобьем на смежные отрезки длительностью 2, 4, 8 и 40 с и получим соответственно наборы из 60, 30, 15 и 3 отрезков. Для каждого отрезка в каждом наборе построим 16-канальную ВАР-модель 20-го порядка и вычислим функцию когерентности для канала O1 и "подмененного" канала P3. На рис.5, а тонкими пунктирными линиями показаны оценки функции когерентности для отдельных отрезков, а сплошной толстой линией – усредненные по всему набору отрезков значения этой функции. Из рисунка видно, что для коротких отрезков длительностью 2 и 4 с характерно наличие высоких значений когерентности, особенно

на частоте альфа-ритма, которые для отдельных отрезков могут достигать единицы. При увеличении длительности отрезка до 8 с ложные пики функции когерентности заметно уменьшаются и практически исчезают в случае 40-секундного отрезка; при этом остается лишь один пик на частоте 50 Гц, соответствующий сигналам сетевой наводки, истинно когерентным в 2 каналах. Этот пример показывает, что для оценки абсолютной силы взаимодействия между каналами (как направленного, так и ненаправленного) следует использовать как можно более длинные отрезки ЭЭГ.

Отметим, что к появлению ложных зависимостей между каналами и к подавлению истинных зависимостей может также приводить присутствие независимых шумов измерения, что было показано в работе [25] для случая 2-канальной ВАР-модели; более того, при неудачном стечении обстоятельств возможно полное обращение направления взаимодействия. Методы борьбы с шумами наблюдения обсуждаются в работах [15, 25].

Оценка статистической значимости. Хотя для оценки статистической значимости некоторых мер взаимодействия получены асимптотические формулы [41], всегда можно использовать метод суррогатных данных [19], который не зависит от предположений, лежащих в основе аналитических формул. Приведем пример использования этого метода, оценив статистическую значимость отличия от нуля пика функции когерентности на частоте 10 Гц для пары отведений *O1-F7*, показанного на рис. 3, *а* (сплошная линия) и воспроизведенного на рис. 5, *б* (толстая сплошная линия). На основе найденных для 16-канального отрезка ЭЭГ длительностью 24 с коэффициентов $a_{km}(p)$ ВАР-модели 26-го порядка и матрицы Σ вычислим по формуле (1) L отрезков $x^{(l)}(n)$ суррогатной ЭЭГ той же длительности, при каждом вычислении используя независимый Гауссовский белый шум $e^{(l)}(n)$ с той же матрицей Σ (удобно использовать процедуру *arsim* (Matlab/Octave) [38]). Использование реальных коэффициентов $a_{km}(p)$ и матрицы Σ позволяет сохранить для каждого отрезка суррогатной ЭЭГ статистические свойства (включая и связи между каналами) реальной

ЭЭГ. Поскольку последовательности шумов $e^{(l)}(n)$ для разных отрезков статистически независимы, то отсутствует статистическая связь между сигналами $x^{(l)}(n)$ при разных l , а также между каждым из них и реальной ЭЭГ. Если теперь взять L копий реальной ЭЭГ и заменить в них сигнал в канале $O1$ на сигнал, взятый поочередно из канала $O1$ каждого отрезка суррогатной ЭЭГ, то в результате получится набор из L отрезков, в каждом из которых канал $O1$ никак не связан ни с одним из остальных 15-и каналов реальной ЭЭГ. Построив ВАР-модель 26-го порядка для каждого из этих отрезков, вычислим L оценок функции когерентности $\tilde{K}_{O1-F7}^2(f)$, совместных со статистической ноль-гипотезой. За счет флуктуаций эти оценки будут, вообще говоря, отличаться от нуля (рис. 5, б, тонкие пунктирные линии). Если число L достаточно велико, то для каждой частоты f полученные оценки образуют достаточно репрезентативное эмпирическое распределение, характеризующее флуктуации функции когерентности при заведомом отсутствии какой-либо реальной статистической связи между сигналами в каналах $O1$ и $F7$. Такое распределение, построенное для частоты 10 Гц, на которой находится пик реальной когерентности (рис. 5, б, толстая сплошная линия), показано на врезке на рис. 5, б, где стрелкой отмечена также величина $K_{O1-F7}^2(f)$ на частоте 10 Гц. Поскольку эта величина лежит правее распределения флуктуационной когерентности, то она является статистически значимой с вероятностью не более, чем $p = 1/L = 0.01$.

Следует отметить, что хотя сами оценки различных мер взаимодействия каналов могут быть существенно смещены за счет объемного проведения (рис. 3, б, в) или за счет флуктуаций (рис. 5, а), сравнение одной и той же меры в разных экспериментальных условиях вполне допустимо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование ВАР-модели многоканальной ЭЭГ для исследования корково-корковых функциональных связей представляется многообещающим, поскольку позволяет оценить силу направленного влияния одного канала на другой, и, следовательно, открывает возможность обсуждать корково-корковые взаимодействия

с точки зрения причинно-следственных отношений. Между тем и построение адекватной VAR-модели и интерпретация вычисленных на ее основе мер статистической связи между каналами сопряжены с соблюдением ряда условий в отношении предварительной обработки ЭЭГ и учетом ряда обстоятельств. В этой работе обсуждались лишь некоторые из них: одни более подробно, как, например, выбор оптимального порядка VAR-модели или влияние объемного проведения на меры статистической связи между каналами, другие были лишь упомянуты. Отчасти это связано с предпочтениями и возможностями автора, отчасти с неодинаковой (по мнению автора) важностью этих проблем для анализа ЭЭГ и особенно для исследования функциональных связей, отчасти с тем, что некоторые вопросы VAR-моделирования еще не решены. Так, сравнение информативности различных мер направленного влияния одного канала на другой в настоящей работе не проводилось, поскольку эти меры еще не составляют выверенного и общепринятого набора инструментов анализа данных – например, отсутствует единое мнение о том, правомерно ли рассматривать частную направленную когерентность как обобщение причинности Винера-Грэйнджера на случай многих каналов [15, 41]. Как широко различные меры будут применяться на практике, зависит и от результатов теоретического анализа их свойств, и от того, насколько информативными они покажут себя при анализе данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-04-00205-а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: "Мир", 1990. 584 с.
2. *Albo Z., Di Prisco G.V., Chen Y., Rangarajan G., Truccolo W., Feng J., Vertes R.P., Ding M.* Is partial coherence a viable technique for identifying generators of neural oscillations? *Biol. Cybern.* 2004. 90: 318-326.
3. *Babiloni F., Cincotti F., Babiloni C., Carducci F., Mattia D., Astolfi L., Basilisco A., Rossini P.M., Ding L., Ni Y., Cheng J., Christine K., Sweeney J., Heg B.* Estimation of the cortical functional connectivity with the multimodal integration of high-resolution EEG and fMRI data by directed transfer function. *NeuroImage.* 2005. 24: 118 – 131.
4. *Baccala L.A., Sameshima K.* Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination. *Biol. Cybern.* 2001. 84: 463-474.
5. *Baccala L.A., Sameshima K., Ballester G., Do Valle A. C., Timo-Iaria C.* Studying the interaction between brain structures via directed coherence and Granger causality. *Applied Sig. Proc.* 1998. 5: 40–48.
6. *Bernasconi C., Koenig P.* On the directionality of cortical interactions studied by structural analysis of electrophysiological recordings. *Biol. Cybern.* 1999. 81: 199-210.
7. *Bozdogan H.* Akaike's information criterion and recent developments in information complexity. *J. Math. Psychol.* 2000. 44: 62-91.
8. *Cadotte A.J., DeMarse T.B., He P., Ding M.* Causal measures of structure and plasticity in simulated and living neural networks. *PLoS ONE.* 2008. 3(10): e3355.
9. *Choi S., Cichocki A., Park H-M., Lee S-Y.* Blind source separation and independent component analysis: a review. *Neural Inform. Proc. – Lett. Revs.* 2005. 6(1): 1-57.
10. *Congedo M., Gouy-Pailler C., Jutten C.* On the blind source separation of human electroencephalogram by approximate joint diagonalization of second order statistics. *Clin. Neurophysiol.* 2008. 119(12): 2677-2686.
11. *Cui J., Xu L., Bressler S.L., Ding M., Liang H.* BSMART: A Matlab/C toolbox for analysis

of multichannel neural time series. *Neural Networks*. 2008. 21: 1094–1104.

12. *Ding M., Bressler S.L., Yang W., Liang H.* Short-window spectral analysis of cortical event-related potentials by adaptive multivariate autoregressive modeling: data preprocessing, model validation, and variability assessment. *Biol. Cybern.* 2000. 83: 35-45.
13. *Gourévitch B., Le Bouquin-Jeannès R., Faucon G.* Linear and nonlinear causality between signals: methods, examples and neurophysiological applications. *Biol. Cybern.* 2006. 95(4): 349-369.
14. *Guo S., Seth A.K., Kendrick K.M., Zhou C., Feng J.* Partial Granger causality-eliminating exogenous inputs and latent variables. *J. Neurosci. Methods*. 2008. 172(1): 79-93.
15. *Guo S., Wu J., Ding M., Feng J.* Uncovering interactions in the frequency domain. *PLoS Comp. Biol.* 2008. 4(5): e1000087.
16. *Hesse W., Moller E., Arnold V., Schack B.* The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *J. Neurosci. Methods*. 2003. 124: 27-44.
17. *Hlaváčková-Schindler K., Paluš M., Vejmelka V. Bhattacharya J.* Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Phys. Rep.* 2007. 441: 1-46.
18. *Kaminski M.* Determination of transmission patterns in multichannel data. *Phil. Trans. R. Soc. B.* 2005. 360: 947–952.
19. *Kaminski M., Ding M., Truccolo W.A., Bressler S.L.* Evaluating causal relations in neural systems: Granger causality, direct transfer function and statistical assessment of significance. *Biol. Cybern.* 2001. 85: 145-157.
20. *Korzeniewska A., Manczak M., Kaminski M., Blinowska K.J., Kasicki S.* Determination of information flow direction among brain structures by a modified directed transfer function (dDTF) method. *J. Neurosci. Methods*. 2003. 125: 195-207.
21. *Le Van Quyen M., Bragin A.* Analysis of dynamic brain oscillations: methodological advances. *Trends in Neurosci.* 2007. 30(7): 365-373.

22. *Makeig S., Delorme A., Westerfield M., Jung T.-P., Townsend J., Courchesne E., Sejnowski T. J.* Electroencephalographic brain dynamics following manually responded visual targets. *PLoS Biol.* 2004. 2(6): 0747-0762.
23. *Moller E., Schack B., Arnold M., Witte H.* Instantaneous multivariate EEG coherence analysis by means of adaptive high-dimensional autoregressive models. *J. Neurosci. Methods.* 2001. 105: 143– 158.
24. *Moller E., Schack B., Vath N., Witte H.* Fitting of one ARMA model to multiple trials increases the time resolution of instantaneous coherence. *Biol. Cybern.* 2003. 89: 303–312.
25. *Nalatore H., Ding M., Rangarajan G.* Mitigating the effects of measurement noise on Granger causality. *Phys. Rev. E. (Stat. Nonlin. Soft. Matter. Phys.)* 2007. 75 (3 Pt 1): 031123 (1-10).
26. *Neumaier A., Schneider T.* Estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models. *ACM Trans. Math. Software.* 2001. 27(1): 27–57.
27. *Nolte G., Bai O., Wheaton L., Mari Z., Vorbach S., Hallet M.* Identifying true brain interaction from EEG data using the imaginary part of coherency. *Clin. Neurophysiol.* 2004. 115: 2292–2307.
28. *Palaniappan R.* Towards optimal model order selection for autoregressive spectral analysis of mental tasks using genetic algorithm. *Int. J. Comp. Sci. Network Security.* 2006. 6(1A): 153-162.
29. *Pardey J., Roberts S., Tarassenko L.* A review of parametric modelling techniques for EEG analysis. *Med. Eng. Phys.* 1996. 18(1): 2-11.
30. *Pascual-Marqui R.D.* Instantaneous and lagged measurements of linear and nonlinear dependence between groups of multivariate time series: frequency decomposition. arXiv:0711.1455 [stat.ME], 2007-November-09, <http://arxiv.org/abs/0711.1455>.
31. *Pereda E., Quiroga R.Q., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Prog. Neurobiol.* 2005. 77: 1–37.
32. *Ramnani N., Behrens T.E.J., Penny W., Matthews P.M.* New approaches for exploring anatomical and functional connectivity in the human brain. *Biol. Psychiatry.* 2004. 56(9):

613-619.

33. *Repucci M.A., Schiff N.D., Victor J.D.* General strategy for hierarchical decomposition of multivariate time series: Implications for temporal lobe seizures. *Ann. Biomed. Eng.* 2001. 29: 1135–1149.
34. *Rosenberg J.R., Halliday D.M., Breeze B., Conway B.A.* Identification of patterns of neuronal connectivity—partial spectra, partial coherence, and neuronal interactions. *J. Neurosci. Methods.* 1998. 83: 57–72.
35. *Salazar R.F., Konig P., Kayser C.* Directed interactions between visual areas and their role in processing image structure and expectancy. *Eur. J. Neurosci.* 2004. 20: 1391–1401.
36. *Schelter B., Winterhalder M., Eichler M., Peifer M., Hellwig B., Guschlbauer B., Lucking C.H., Dahlhaus R., Timmer J.* Testing for directed influences among neural signals using partial directed coherence. *J. Neurosci. Methods.* 2005. 152: 210–219.
37. *Schelter B., Winterhalder M., Hellwig B., Guschlbauer B., Lucking C.H., Timmer J.* Direct or indirect? Graphical models for neural oscillators. *J. Physiol (France).* 2006. 99: 37–46.
38. *Schneider T., Neumaier A.* Algorithm 808: ARfit — A Matlab package for the estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models. *ACM Trans. Math. Software.* 2001. 27(1): 58–65.
39. *Srinivasan R., Winter W.R., Nunez P.L.* Source analysis of EEG oscillations using high-resolution EEG and MEG. *Progr. Brain Res.* 2006. 159: 29–42.
40. *Stephan K.E., Harrison L.M., Penny W.D., Friston K.J.* Biophysical models of fMRI responses. *Curr. Opin. Neurobiol.* 2004. 14: 629–635.
41. *Takahashi D.Y., Baccala L.A., Sameshima K.* Connectivity inference between neural structures via partial directed coherence. *J. Appl. Statistics.* 2007. 34(10): 1255–1269.
42. *Thakor N.V., Tong S.* Advances in quantitative electroencephalogram analysis methods. *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2004. 6: 453–495.
43. *Varela F., Lachaux J-P., Rodriguez E., Martinerie J.* The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration. *Nat. Rev. | Neurosci.* 2001. 2: 229–239.
44. *Wang S., Chen Y., Ding M., Feng J., Stein J.F., Aziz T.Z., Liu X.* Revealing the dynamic

causal interdependence between neural and muscular signals in Parkinsonian tremor. *J. Franklin Inst.* 2007. 344: 180–195.

45. *Ward L.M.* Synchronous neural oscillations and cognitive processes. *Trends Cogn. Sci.* 2003. 7(12): 553–559.
46. *Wehling S, Simion C, Shimojo S, Bhattacharya J.* Assessment of connectivity patterns from multivariate time series by partial directed coherence. *Chaos Complex. Lett.* 2007. 2: 413-433.
47. *Wolters C., de Munck J.C.* Volume conduction. *Scholarpedia.* 2007. 2(3):1738.
48. *Zhang T., Okada Y.* Recursive artifact windowed – single tone extraction method (RAW–STEM) as periodic noise filter for electrophysiological signals with interfering transients. *J. Neurosci. Methods.* 2006. 155: 308-318.
49. *Zhu L., Lai Y-C., He J.* Probing changes in neural interaction during adaptation. *Neural Comput.* 2003. 15: 2359–2377.
50. *Zoldi S.M., Krystal A., Greenside H.S.* Stationarity and redundancy of multichannel EEG data recorded during generalized tonic-clonic seizures. *Brain Topogr.* 2000. 12(3): 187-200.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Определение оптимального порядка VAR-модели. *a* – функция $AIC(P)$ резко убывает при избыточно высоких значениях порядка модели P . *б* – зависимости $AIC(P)$ для 2, 6, 10 и 12-канальной VAR-модели отрезка ЭЭГ длительностью 4 сек. показаны сплошной, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями соответственно; *в* – зависимости $AIC(P)$ для 16-канальной VAR-модели отрезков ЭЭГ длительностью 2,4,8 и 16 сек. показаны сплошной, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями соответственно; *г* – влияние способа удаления сетевой наводки на характер функции $AIC(P)$. На врезке показан спектр мощности сигнала в отведении *O1*. Пик на частоте 50 Гц соответствует сетевой наводке. Вид функции $AIC(P)$ при удалении сетевой наводки методом вычитания синусоиды (сплошная линия) с помощью режекторного фильтра (штриховая линия) и с помощью низкочастотного фильтра Баттерворта 4-го порядка с верхней граничной частотой 35 Гц (пунктирная линия); *д* – сравнение классической оценки спектра мощности и оценок, основанных на VAR-модели оптимального (по критерию Акаике) порядка. Классическая оценка (пунктирная линия) получена усреднением 60 оценок (метод Уэлча, эффективное частотное разрешение - 2 Гц) для 2-секундных отрезков сигнала в отведении *O1* 16-канальной ЭЭГ длительностью 2 мин. VAR-оценки спектра мощности вычислены для модели оптимального порядка усреднением индивидуальных VAR-оценок по 60 отрезкам (оптимальный порядок равен 3, штриховая линия) и для всего 2-минутного отрезка (оптимальный порядок равен 26, сплошная линия). По оси абсцисс отложена частота, Гц, по оси ординат – спектральная плотность мощности, $\text{мкВ}^2/\text{Гц}$.

Fig. 1. Finding an optimal order of VAR model with Akaike Information Criterion (AIC). *a* – $AIC(P)$ sharply decreases when model order P is too high (2 sec.-long segment of 16-channel EEG); *б* – $AIC(P)$ for 2, 6, 10- and 12-channel VAR models (4 sec.-long segment of EEG) are shown with the solid, dashed, dash-dotted and dotted lines, respectively; *в* – $AIC(P)$ for 2, 4, 8 and 16 sec.-long segments of 16-channel EEG are shown with the solid, dashed, dash-dotted

and dotted lines, respectively; ε – the impact of the method used for removing 50 Hz power line signal onto AIC-based optimal order estimate. The inset shows the power spectrum for the original recording where the spectral maximum at 50 Hz corresponds to the power line signal; $AIC(P)$ is shown for the case when power line signal is removed by either subtraction of the best-fit sinusoid (solid line), or applying a standard rejector filter (dashed line) or applying the 4th order low-pass Butterworth filter with 35 Hz high-frequency cutoff; δ – classical estimates of power spectrum vs. those based on VAR-model of optimal (AIC) order. The classical spectral estimate is computed by averaging of the individual spectral estimates (Welch method with 2 Hz effective frequency resolution) for 60 2 sec.-long segments (dashed line). The segments are taken from $O1$ channel of a 2-min. long 16-channel EEG recording. VAR-based estimates of power spectra are computed either via averaging VAR (optimal order - 3) estimates over 60 individual 2 sec.-long segments (dotted line) or by applying a single VAR model (optimal order - 26) to the whole 2 min.-long EEG record (solid line). In the plots, the frequency (in Hz) is plotted along the horizontal axis and the power density value ($\mu V^2/Hz$) is plotted along the vertical axis.

Рис. 2. Зависимость квадрата модуля когерентности $K_{km}^2(f)$ (тонкая линия) и нормированной направленной передаточной функции $\gamma_{k \leftarrow m}^2(f)$ (толстые линии) для отведений P3 и P4 (а) от выбранного порядка 16-канальной VAR-модели ($P = 8, 14, 20, 26$) и (б) от числа включенных в модель каналов ($M = 4, 8, 10, 16$) при неизменном порядке модели, равном 20. Сплошной линией обозначена функция $\gamma_{P3 \leftarrow P4}^2(f)$, а штриховой – $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$. Функции $K_{km}^2(f)$ и $\gamma_{k \leftarrow m}^2(f)$ вычислены для пары отведений P3 и P4 для отрезка ЭЭГ длительностью 12 с. По оси абсцисс отложена частота, Гц; по оси ординат – значение функции.

Fig. 2. For a pair of channels, P3 and P4, the coherence function, $K_{km}^2(f)$, (thin line) and normalized directed transfer function, $\gamma_{k \leftarrow m}^2(f)$, (thick lines) are shown as a function of (a) the order of 16-channel VAR model ($P = 8, 14, 20, 26$) and (б) the number of channels included in the VAR model ($M = 4, 8, 10, 16$) for the optimal order of 20. In all the plots, the frequency

(in Hz) is plotted along the horizontal axis and the $K_{km}^2(f)$ value is plotted along the vertical axis; $\gamma_{P3 \leftarrow P4}^2(f)$ and $\gamma_{P4 \leftarrow P3}^2(f)$ are shown in solid and dashed lines, respectively. All the functions are computed for a segment (12 sec. long) of 16-channel EEG record.

Рис. 3. Влияния объемного проведения на меры функционального корково-коркового взаимодействия. *a* – модуль комплекснозначной когерентности (сплошная линия) и ее мнимая часть (штриховая линия), вычисленные на основе VAR-модели 26-го порядка для отрезка непрерывной (24 сек.) 16-канальной ЭЭГ для пар близких *Cz-C4*, *O2-T6* и далеких *F7-O1*, *F8-C3* отведений. *b*, *в* – имитация влияния объемного проведения за счет искусственного смещения сигналов отведений *F7* и *O1* при увеличении степени смещения *g* (0, 0.2, 0.4, 0.6) на модуль комплекснозначной когерентности (сплошная линия) и ее мнимую часть (штриховая линия, *b*) и на частную направленную когерентность $\pi_{F7 \leftarrow O1}(f)$ (сплошная линия) и $\pi_{O1 \leftarrow F7}(f)$ (штриховая линия, *в*). По оси абсцисс отложена частота, Гц; по оси ординат - величина когерентности.

Fig. 3. Impact of volume conduction on the measures of functional cortical connectivity. *a* – absolute value of complex-valued coherence function (solid line) and its imaginary part (dashed line) computed with VAR-model of 26-th order for the continuous segment (24 sec.) of 16-channel EEG in pairs of close electrodes, *Cz-C4*, *O2-T6*, and in pairs of distant electrodes *F7-O1*, *F8-C3*. *b*, *в* – simulating volume conduction influence on the absolute value of complex-valued coherence (solid line) and its imaginary part (dashed line) (*b*) and on the partial directed coherence $\pi_{F7 \leftarrow O1}(f)$ (solid line) и $\pi_{O1 \leftarrow F7}(f)$ (dashed line) (*в*) via artificial mixing of the signals taken from F7 and O1 electrodes with progressively increasing values of the mixing factor *g* (0, 0.2, 0.4, 0.6). In all the plots, the frequency (in Hz) is plotted along the horizontal axis and the coherence value is plotted along the vertical axis.

Рис. 4. Влияние соотношения уровней сигналов (масштаба) на частную направленную когерентность $\pi_{k \leftarrow m}(f)$ и нормированную направленную передаточную функцию $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ для каналов *O2* и *P4* (отрезок 12-канальной ЭЭГ длительностью 24 с, VAR-модель 26-го порядка) в случае 2-кратного усиления сигнала в *P4* и ослабления в *O2* (*a*, *b*) и в случае

нормировки сигналов на их стандартные отклонения в $P4$ и $O2$ (ϑ, ε): a – функции для исходного сигнала (тонкие линии) и для измененного сигнала (толстые линии) показаны: $\pi_{P4 \leftarrow O2}(f)$ сплошной линией и $\pi_{O2 \leftarrow P4}(f)$ – пунктирной; b – то же, что и на a , но для функций $\gamma_{P4 \leftarrow O2}(f)$ и $\gamma_{O2 \leftarrow P4}(f)$ соответственно; ϑ – инвариантные к масштабу функции $\pi_{P4 \leftarrow O2}^{(\sigma)}(f)$ и $\pi_{O2 \leftarrow P4}^{(\sigma)}(f)$ для исходного сигнала (тонкие линии) и стандартные функции $\pi_{P4 \leftarrow O2}(f)$ и $\pi_{O2 \leftarrow P4}(f)$ для нормированного сигнала (толстые линии) показаны соответственно сплошными и штриховыми линиями; ε – то же, что и на ϑ , но соответственно для пары $\gamma_{P4 \leftarrow O2}^{(\sigma)}(f), \gamma_{O2 \leftarrow P4}^{(\sigma)}(f)$ и пары $\gamma_{P4 \leftarrow O2}(f), \gamma_{O2 \leftarrow P4}(f)$ функций. По оси абсцисс отложена частота, Гц; по оси ординат – величина когерентности.

Fig. 4. The impact of signal scale onto the partial directed coherence $\pi_{k \leftarrow m}(f)$ and normalized directed transfer function $\gamma_{k \leftarrow m}(f)$ for $O2$ and $P4$ channels taken from 12-channel 24-sec.-long EEG recording is estimated in two cases: when the signal in $P4$ channel is amplified by a factor of 2 and the signal in $O2$ is attenuated by a factor of 2 (a, b) and when the signal in each channel ($P4$ and $O2$) is normalized by its standard deviation value (ϑ, ε). a – the functions for the original signal (thin lines) and for the altered signal (thick lines) are shown with either solid line ($\pi_{P4 \leftarrow O2}(f)$) or dashed lines ($\pi_{O2 \leftarrow P4}(f)$); b – same as (a) but for the different pair of functions, $\gamma_{P4 \leftarrow O2}(f)$ and $\gamma_{O2 \leftarrow P4}(f)$; ϑ – scale-invariant versions of functions, $\pi_{P4 \leftarrow O2}^{(\sigma)}(f)$ and $\pi_{O2 \leftarrow P4}^{(\sigma)}(f)$, for the original signal (thin lines) and the standard functions, $\pi_{P4 \leftarrow O2}(f)$ and $\pi_{O2 \leftarrow P4}(f)$, for the normalized signals (thick lines) are shown with solid and dashed lines, correspondingly; ε – same as (ϑ) but for the different pairs of functions: for the $\gamma_{P4 \leftarrow O2}^{(\sigma)}(f)$ and $\gamma_{O2 \leftarrow P4}^{(\sigma)}(f)$ pair and for the $\gamma_{P4 \leftarrow O2}(f)$ and $\gamma_{O2 \leftarrow P4}(f)$ pair. In all computations the VAR-model of the 26th order was used. In the plots, the frequency (in Hz) is plotted along the horizontal axis and the coherence value is plotted along the vertical axis.

Рис. 5. Максимумы функции когерентности и оценка их статистической значимости. a – индивидуальные оценки (тонкие пунктирные линии) и усредненная оценка (сплошная толстая линия) функции когерентности (16-канальная VAR-модель 20-го порядка) для 2

каналов, содержащих заведомо статистически не связанные сигналы ЭЭГ, при различной длительности T отрезков: 2 с (60 отрезков), 4 с (30 отрезков), 8 с (15 отрезков) и 40 с (3 отрезка). (б) Оценка статистической значимости максимума функции когерентности на частоте 10 Гц методом суррогатных данных. Толстой сплошной линией показана функция когерентности для пары отведений $O1-F7$ (отрезок 16-канальной ЭЭГ длительностью 24 с, VAR-модель 26-го порядка), тонкими пунктирными линиями – ее оценки для 100 отрезков суррогатных данных. По оси абсцисс отложена частота, Гц; по оси ординат - величина когерентности. Распределение значений функции когерентности на частоте 10 Гц для суррогатной ЭЭГ показано на врезке, где стрелкой отмечено соответствующее значение когерентности $O1-F7$ для реальной ЭЭГ.

Fig. 5. Peaks of the coherence function (CF) and assessment of their statistical significance. *a* – shown are the individual estimates of the ordinary coherence (16-channel VAR model of 20th order) function (thin dotted lines) and their averages (thick solid line) for two statistically independent EEG signals of different duration T : 2 sec. (60 segments), 4 sec. (30 segments), 8 sec. (15 segments), and 40 sec. (3 segments); *b* – estimation of statistical significance of the peak of the ordinary coherence function with the surrogate data method. CF between $O1$ and $F7$ channels (24 sec.-long 16-channel EEG segment, VAR model of 26th order) is shown (thick line) along with the individual CFs (dotted lines) computed for a total of 100 surrogate segments with no statistical interaction between $O1$ and $F7$. The inset shows the distribution of the surrogate CF value taken at 10 Hz. The downward arrow points to the value of the actual CF (at 10 Hz) for the $O1-F7$ pair. In all the plots, the frequency (in Hz) is plotted along the horizontal axis and the coherence value is plotted along the vertical axis.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Влияние частотной фильтрации сигнала ЭЭГ на ее VAR-модель

Предположим, что исходный M -канальный сигнал $x(n)$ является VAR-процессом порядка P и описывается формулой (1) и что все каналы $x_i(n)$ этого сигнала подверглись частотной фильтрации с помощью одного и того же линейного фильтра

$$\sum_{k=1}^{k=K} c(k)y_j(n-k) = \sum_{q=1}^{q=Q} d(q)x_j(n-q), \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (\text{A.1})$$

где $y_i(n)$ – сигнал на выходе фильтра.

Пусть $C(f)$ и $D(f)$ – преобразования Фурье последовательностей коэффициентов фильтров $c(k)$ и $d(q)$, соответственно. Тогда Фурье-образы фильтрованного $Y(f)$ и исходного $X(f)$ векторных сигналов окажутся связаны соотношением:

$$C(f)Y(f) = D(f)X(f). \quad (\text{A.2})$$

Умножив слева обе части (A.2) на матрицу $A(f)$ и учтя соотношение (2), получим

$$C(f)A(f)Y(f) = D(f)E(f). \quad (\text{A.3})$$

Из (A.3) следует, что $y(n)$ является не VAR-процессом порядка P , как исходный сигнал $x(n)$, а описывается векторной авторегрессионной моделью со скользящим средним (VARСС-моделью) порядка $(P+K, Q)$, которая эквивалентна VAR-модели бесконечного порядка [1].

Б. Влияние объемного проведения на коэффициенты M -канальной VAR-модели и на меры взаимодействия между каналами

Влияние объемного проведения [47] на коэффициенты M -канальной VAR-модели и, следовательно, на все зависящие от них меры взаимодействия между каналами ЭЭГ можно качественно оценить, мысленно заменив сложное пространственное распределение реальных источников ЭЭГ сигнала на M эквивалентных точечных источников, расположенных вблизи записывающих электродов [22]. Тогда влияние объемного проведения можно описать квадратной матрицей смешения (mixing matrix) G , элементы G_{km} которой показывают, какой вклад m -тый эквивалентный источник

вносит в сигнал, записываемый с k -того электрода. В этом приближении вектор $y(n)$ значений сигналов ЭЭГ, регистрируемых с M электродов, будет связан с вектором $x(n)$ значений сигнала M корковых источников соотношением

$$y(n) = Gx(n), \quad (\text{Б.1})$$

где элементы G_{km} – действительные числа [47]. Предположим, что существует обратная матрица G^{-1} ($\det(G) \neq 0$), и что сигналы $x(n)$ описываются ВАР-моделью (1). Умножив (1) на матрицу G слева и учитывая, что $x(n-p) = G^{-1}y(n-p)$, получим

$$y(n) = \sum_{p=1}^{p=P} Ga(p)G^{-1}y(n-p) + Ge(n). \quad (\text{Б.2})$$

Из (Б.2) следует, что наблюдаемый сигнал ЭЭГ описывается ВАР-моделью порядка P с коэффициентами

$$a^{(y)}(p) = Ga^{(x)}(p)G^{-1}. \quad (\text{Б.3})$$

Нетрудно убедиться, что Фурье-образы коэффициентов ВАР-модели, направленные передаточные функции, спектральные матрицы и ковариационные матрицы остатков авторегрессии для сигналов $x(n)$ и $y(n)$ будут связаны соотношениями

$$A^{(y)}(f) = GA^{(x)}(f)G^{-1}, \quad (\text{Б.4})$$

$$H^{(y)}(f) = GH^{(x)}(f)G^{-1}, \quad (\text{Б.5})$$

$$\Sigma^{(y)} = G\Sigma^{(x)}G^H, \quad (\text{Б.6})$$

$$S^{(y)}(f) = GS^{(x)}(f)G^H. \quad (\text{Б.7})$$

В соотношениях (Б.4-Б.7) верхними индексами x и y в круглых скобках отмечены матрицы, относящиеся соответственно к сигналам источников и к наблюдаемой ЭЭГ.

Преобразования (Б.4-Б.7) позволяют понять общий характер влияния объемного проведения на меры взаимодействия каналов. Формула (Б.3) показывает, что для наблюдаемой ЭЭГ величина прямого влияния $DC_{k \leftarrow m}$ в общем случае не будет равна нулю, даже если прямое влияние m -того источника на k -тый отсутствует. Из соотношения (Б.4) аналогичный вывод следует и в отношении функции частной

направленной когерентности. В силу (Б.5) изменятся также направленная передаточная функция и ее нормированный вариант. За счет "перемешивания" каналов (Б.1) между остатками авторегрессии в разных каналах появляется линейная статистическая зависимость, описываемая слагаемым $Ge(n)$, которая приводит к недиагональной ковариационной матрице $\Sigma^{(y)}$ остатков авторегрессии (Б.6). При этом величина направленной когерентности $|\delta_{k \leftarrow m}^{(y)}(f)|^2$ может оказаться больше единицы.

В. Влияние усиления (масштаба сигнала) в каналах

Сравним ВАР-модели двух сигналов $x(n)$ и $y(n)$, компоненты которых связаны соотношением $y_k(n) = G_{kk}x(n)$, где коэффициенты G_{kk} показывают, насколько усилен или ослаблен сигнал $y(n)$ в канале k по сравнению с сигналом $x(n)$. Поскольку такая связь – частный случай преобразования (Б.1), справедливы соотношения (Б.3-Б.7), которые в данном случае существенно упростятся, поскольку матрица G является диагональной. Из (Б.1) следует, что ВАР-коэффициенты изменяются при преобразовании масштаба

$$a_{km}^{(y)}(p) = (G_{kk} / G_{mm}) a_{km}^{(x)}(p), \quad (\text{В.1})$$

поэтому изменится и зависящая от них величина $DC_{k \leftarrow m}$

$$DC_{k \leftarrow m}^{(y)} = \sum_{p=1}^{p=P} \left[\frac{G_{kk}}{G_{mm}} a_{km}^{(x)}(p) \right]^2 = \left(\frac{G_{kk}}{G_{mm}} \right)^2 \sum_{p=1}^{p=P} a_{km}^{(x)}(p)^2 = \left(\frac{G_{kk}}{G_{mm}} \right)^2 DC_{k \leftarrow m}^{(x)}. \quad (\text{В.2})$$

Наибольшее различие между $DC_{k \leftarrow m}^{(y)}$ и $DC_{k \leftarrow m}^{(x)}$ достигается при наибольшей или наименьшей величине дроби $(G_{kk} / G_{mm})^2$, то есть, когда один из сигналов максимально ослаблен, а второй – максимально усилен.

Из (В.1) имеем для Фурье-образов ВАР-коэффициентов $A_{km}^{(y)}(f) = (G_{kk} / G_{mm}) A_{km}^{(x)}(f)$ и для передаточной функции $H_{km}^{(y)}(f) = (G_{kk} / G_{mm}) H_{km}^{(x)}(f)$. Поэтому ни $|A_{km}(f)|$, ни $\theta_{k \leftarrow m}(f) = |H_{km}(f)|$ не могут рассматриваться как независимые от масштаба сигналов меры взаимодействия между каналами. Преобразование G приведет к изменению функции частной направленной когерентности и нормированной направленной передаточной

функции

$$\pi_{k \leftarrow m}^{(y)}(f) = \left| \frac{G_{kk}}{G_{mm}} A_{km}(f) \right| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} \left| \frac{G_{jj}}{G_{mm}} A_{jm}(f) \right|^2} = |G_{kk} A_{km}(f)| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} |G_{jj} A_{jm}(f)|^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_{k \leftarrow m}(f) = \left| \frac{G_{kk}}{G_{mm}} H_{km}(f) \right| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} \left| \frac{G_{kk}}{G_{jj}} H_{kj}(f) \right|^2} = |H_{km}(f) / G_{mm}| / \sqrt{\sum_{j=1}^{j=M} |H_{kj}(f) / G_{jj}|^2}. \quad (\text{B.4})$$

Поскольку из (Б.7) следует, что $S_{km}^{(yy)}(f) = G_{kk} G_{mm} S_{km}^{(xx)}(f)$, в результате преобразования масштаба функция когерентности не изменится

$$C_{km}^{(y)}(f) = G_{kk} G_{mm} S_{km}^{(x)}(f) / \sqrt{G_{kk}^2 S_{kk}^{(x)}(f) G_{mm}^2 S_{mm}^{(x)}(f)} = S_{km}^{(x)}(f) / \sqrt{S_{kk}^{(x)}(f) S_{mm}^{(x)}(f)} = C_{km}^{(x)}(f). \quad (\text{B.5})$$

Вследствие того, что ковариационная матрица остатков авторегрессии преобразуется по тому же правилу $\Sigma_{km}^{(y)}(f) = G_{kk} G_{mm} \Sigma_{km}^{(x)}(f)$, что и спектральная матрица, останется неизменной также и функция направленной когерентности

$$\delta_{k \leftarrow m}^{(y)}(f) = \sigma_{mm}^{(y)} H_{km}^{(y)}(f) / \sqrt{S_{kk}^{(y)}(f)} = \left[G_{mm} \sigma_{mm}^{(x)} \left(\frac{G_{kk}}{G_{mm}} \right) H_{km}^{(x)}(f) \right] / \sqrt{G_{kk}^2 S_{kk}^{(x)}(f)} = \delta_{k \leftarrow m}^{(x)}(f). \quad (\text{B.6})$$

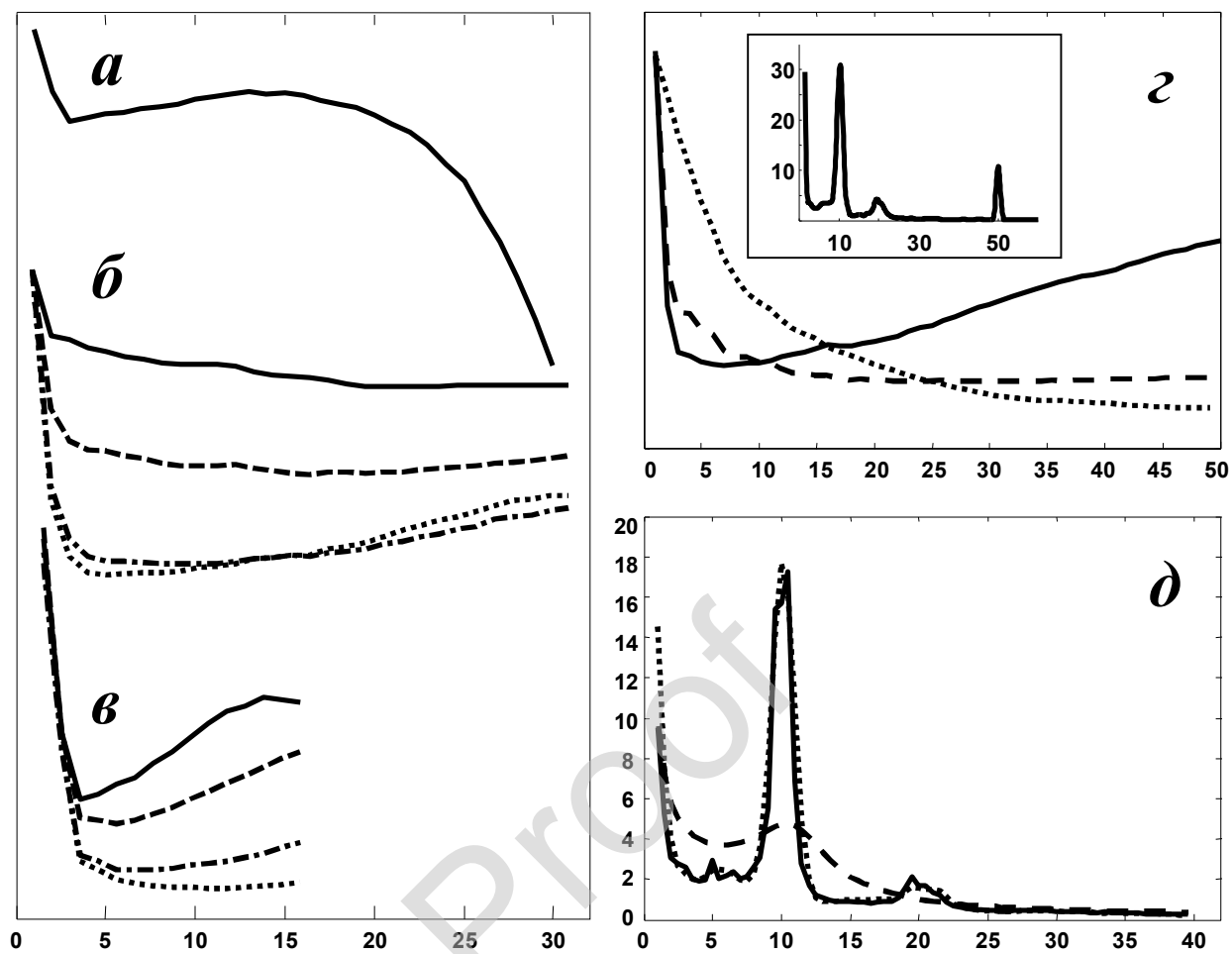


Рис.1.

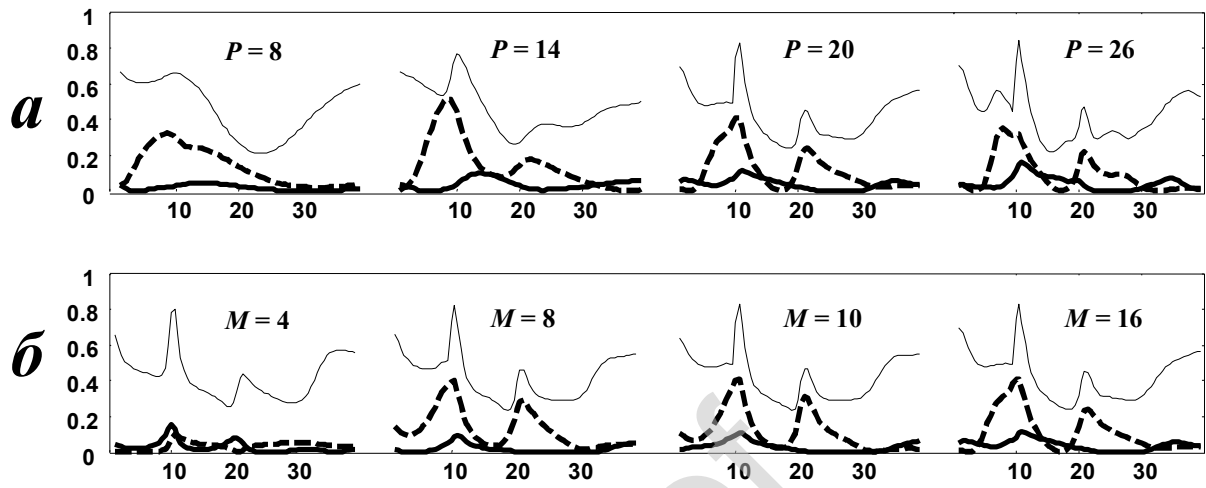


Рис.2.

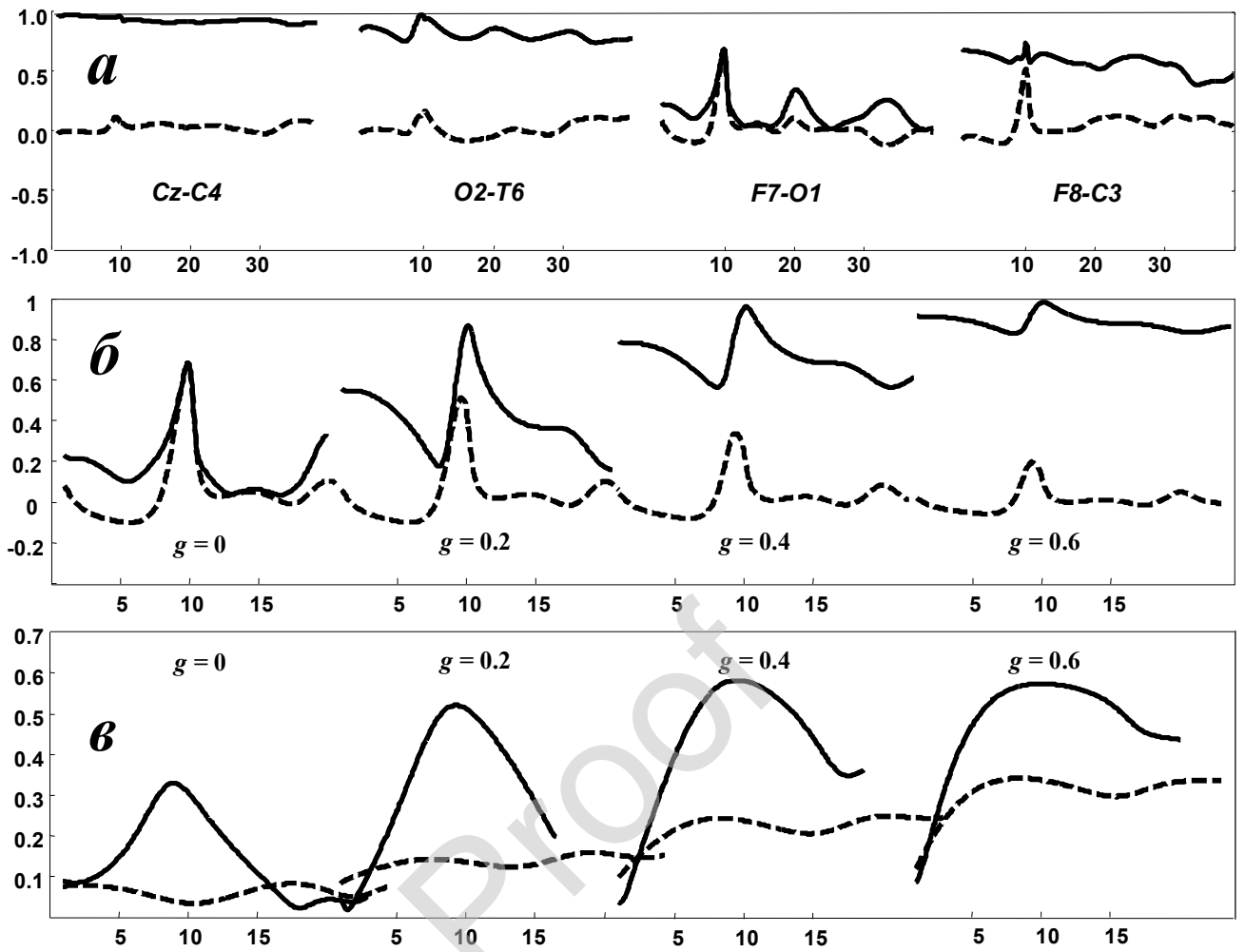


Рис.3.

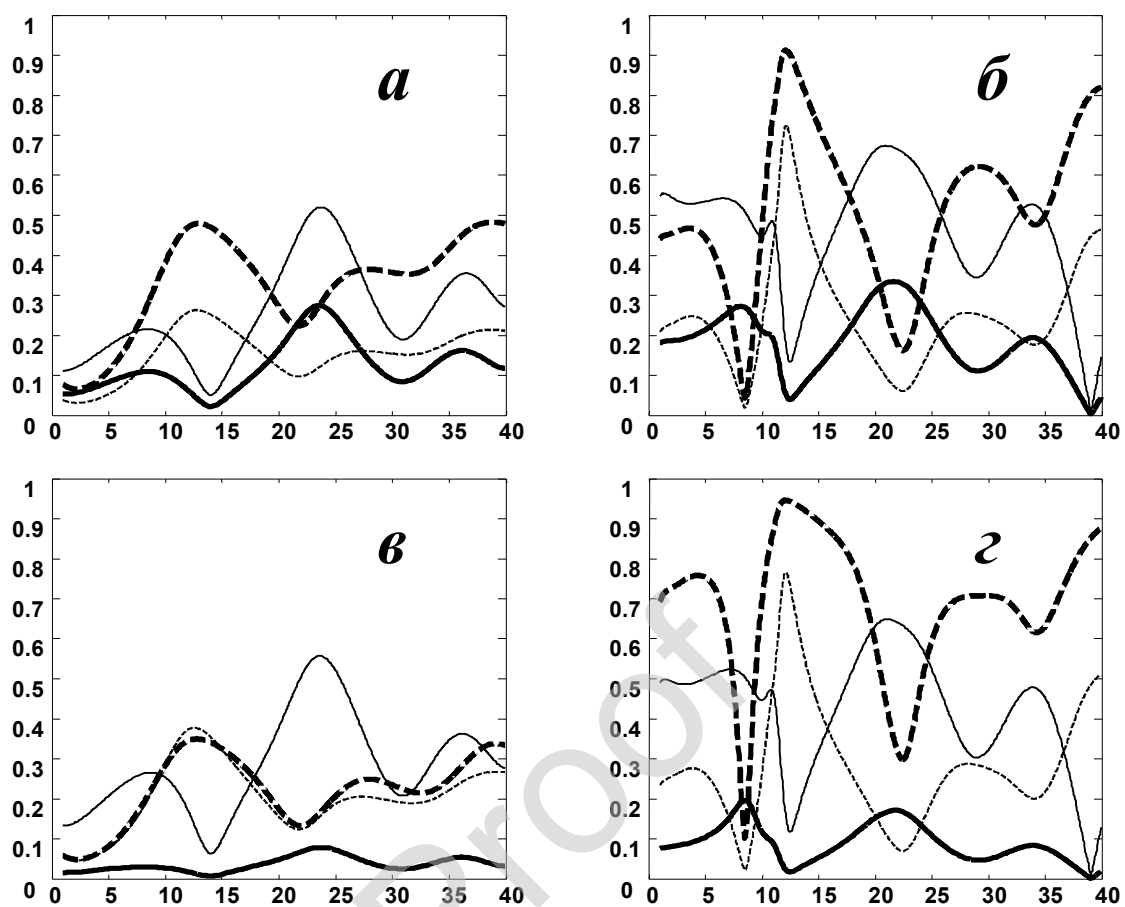


Рис.4.

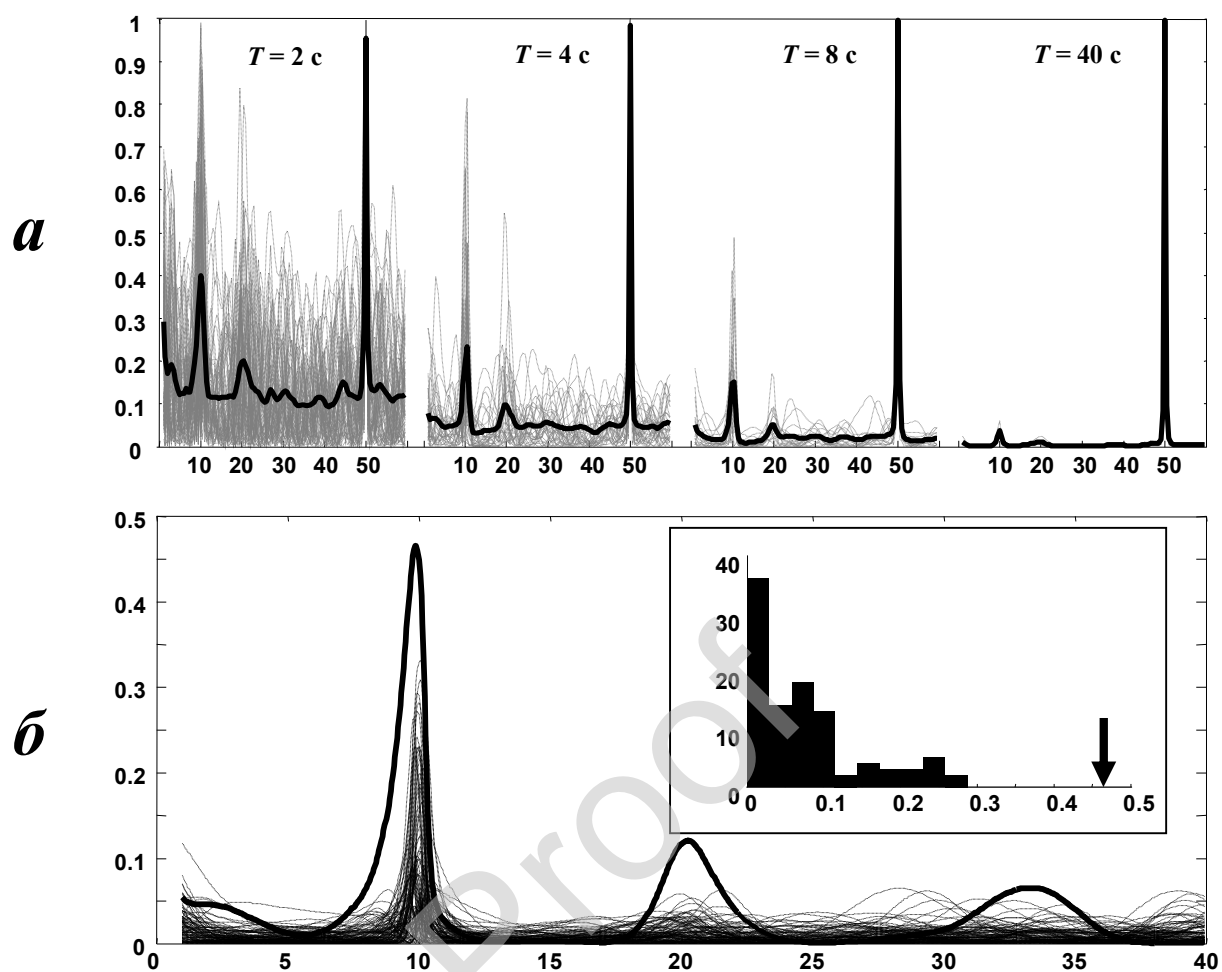


Рис.5.